Définition 13 (combinaison linéaire).
Soient $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Alors le vecteur $\vec{b}$ défini par

est appelé *combinaison linéaire* des $\vec{a_i}$ et les λ_i sont dits les *coefficients* de la combinaison linéaire.

Remarques

1) Certains des λ_i peuvent être nuls ou négatifs.

2) Les combinaisons linéaires donnent lieu à deux types de problèmes :
- soit on connaît les coefficients λ_i et les vecteurs $\vec{a_i}$ et on cherche à calculer les composantes de la combinaison linéaire $\vec{b}$;
- soit on connaît les vecteurs $\vec{a_i}$ et $\vec{b}$ et on cherche à déterminer les coefficients λ_i (s'il s existent !).

Liens systèmes - matrices - équations vectorielles

Exemple On considère les vecteurs suivants dans $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{a_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \vec{a_2} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \vec{a_3} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur $\vec{b}$ peut-il s'exprimer comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{a_1}$, $\vec{a_2}$, $\vec{a_3}$?

Suite de l'exemple

Généralisation

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right. \Leftrightarrow \ B = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Théorème 3. *Une équation vectorielle*

a le même ensemble de solutions que le système linéaire correspondant à la matrice augmentée

Remarque

Si le système admet une solution, alors $\vec{b}$ est combinaison linéaire des vecteurs colonnes de la matrice A.

Exemple

Ensembles engendrés par des vecteurs

Ensemble engendré par un vecteur de $\mathbb{R}^2$

Ensemble engendré par deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$

Définition 14 (span ou vect)**.**
Soient $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$. L'*ensemble des combinaisons linéaires* de $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p$ s'appelle le *span*. On le note

Remarques

Exercice additionnel, voir Moodle.

Exemple 1

Exemple 2

1.5 Équation matricielle

But

Définition 15 (Produit matrice-vecteur)**.**
Soient A une matrice $m \times n$ et $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. On définit le *produit* $A\vec{x}$ par

Exemples

Remarque

Lien entre produit matriciel et systèmes d'équations linéaires

Exemple Soit

$$\mathcal{S} = \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = -8 \end{cases}$$

On a

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$$

On peut écrire le système comme

1) le système d'équations linéaires $\mathcal{S}$

2) la matrice augmentée

3) une équation vectorielle

4) une équation matricielle

Toutes ces représentations ont le même ensemble de solutions. On utilisera principalement la notation 4). Pour la résolution, on aura recours à la représentation 2) et l'algorithme de Gauss-Jordan.

Définition 16 (équation matricielle)**.**
Soient A une matrice $m \times n$ et $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ et $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Alors l'équation